
MODELIZACION DE LINEAS Y CABLES DE AT PARA EL CÁLCULO DE LA DISTRIBUCION DE CORRIENTES DE FALLA A TIERRA EN ESTACIONES TRANSFORMADORAS

ADRIAN KISIELEWSKY*
EDENOR S.A.
Argentina

J. DELFINO
Argentina

Resumen – Cuando se produce una falla monofásica a tierra en una Estación Transformadora de AT (ET) con un sistema de neutro puesto rígido a tierra, la corriente de falla retorna a la fuente por varios caminos y se deriva parte a través de la malla y luego a tierra, parte por los hilos de guardia de las líneas de AT y parte por las mallas de los cables blindados de AT y MT.

Para el cálculo y diseño seguro y confiable de la malla de puesta a tierra (PaT) de una estación, todos los procedimientos de las normativas internacionales [1], [2], [3], requieren conocer el porcentaje de la corriente de falla total que efectivamente drena la malla a tierra, ya que es esta magnitud la que determina la elevación de potencial del conjunto. A menor corriente drenada por la malla, menores serán las tensiones de paso y contacto producidas durante la falla.

En este trabajo se presenta un método de cálculo de la distribución de la corriente de falla que es muy sencillo de utilizar y que no tiene la necesidad de una programación compleja, **de manera tal que cualquier proyectista de Estaciones de AT pueda obtener rápidamente el dato de corriente que retorna a la fuente a través de la malla, sin recurrir a programas comerciales o tablas empíricas.** Además se presenta una verificación del modelo utilizado mediante una simulación computacional con EMTP-ATP.

Palabras clave: Puesta a Tierra – Distribución de corrientes de falla – Factor de división de corrientes – Modelo de Línea – Modelo de Cable

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo de la distribución de corriente de falla monofásica a tierra en una ET o en una línea de AT (LAT) se ha enfocado de diversas maneras a lo largo del siglo XX. Desde los primeros trabajos de Endrenyi [4] basándose en modelos de líneas en parámetros distribuidos, se han utilizado muchos enfoques diferentes con mayor o menor facilidad de aplicación y/o programación. En [5] los autores desarrollan ecuaciones generalizadas de las líneas considerando a la resistencia de cada torre uniformemente distribuida. Otros autores se basan en resolver el modelo circuital entre torres con ecuaciones en Diferencias [6], [13] o algoritmos recursivos aplicando las ecuaciones de Kirchoff entre vanos [12]. En [7] y [10] se desarrollan ecuaciones analíticas cerradas, a partir de un modelo circuital por vano de una línea o de un cable de AT [11], mientras que en [8] y [9] se utilizan modelos de parámetros concentrados con la solución de series finitas e infinitas para obtener ecuaciones de impedancias equivalentes de las líneas en falla. Uno de los aportes conceptualmente más claros y transparentes fue hecho por Sebo [14], basándose en el desarrollo de matrices por vano, para luego conectarlas en cascada para toda la línea. El mismo autor desarrolló otro enfoque basado en una formulación impedancia de una matriz por vano [15].

Otra alternativa que estuvo al alcance del ingeniero fue la utilización de factores de tabla o gráficos para estimar la distribución de corrientes de falla entre los HG de LATs o blindajes de cables y la tierra [1], [16].

Todos estos enfoques, aunque resuelven correctamente el problema, requieren programación para cada caso en particular (en función de la cantidad de LAT o Cables a considerar) o implican tener acceso a algún programa comercial cerrado, o las ecuaciones analíticas presentadas, aunque sencillas de utilizar mediante computadora, son de difícil deducción y dificultan la comprensión conceptual del fenómeno, en caso de que sea necesario que el proyectista requiera aplicarlas a algún caso distinto a cual fueron deducidas. La

utilización de factores de tabla o curvas tiene el problema de no adaptarse a cada caso particular de cada compañía [1], o ser una excesiva simplificación de problema real [16].

El objeto de este trabajo, basado en [14], es describir un método matricial sencillo de aplicar (aun con una planilla de cálculo), rápido, eficiente y sobre todo, transparente al ingeniero proyectista que necesite diseñar una malla de tierra de una ET y que sea adaptable y modificable a las necesidades de la configuración y cantidad de líneas y cables que entran y salen de una ET de Alta Tensión.

2. DESARROLLO DEL MÉTODO

En un sistema con neutro rígido a tierra una falla monofásica provoca la circulación de corriente de secuencia homopolar por los conductores de fase. En el caso sencillo de una subestación alimentada desde una línea aérea en simple terna o un cable, la corriente homopolar retornará por la tierra y por el hilo de guardia (HG) o las pantallas de los cables. La situación frente a una falla en una ET se muestra en la Figuras N°1 y N°2.

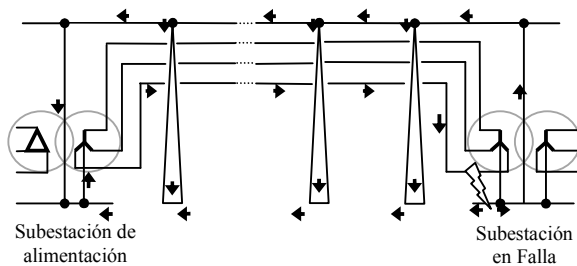


Figura N°1. Falla en subestación conectada por línea aérea

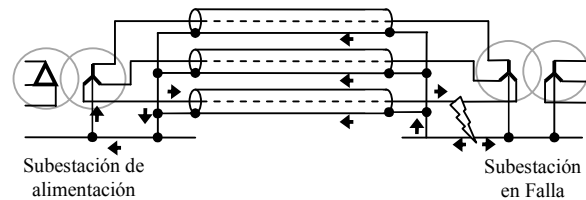


Figura N°2. Falla en subestación conectada por un cable

En la zona de la falla la corriente circula parte por el terreno y parte por el HG o la pantalla del cable, pero al alejarse de esta zona, una fracción de la corriente que circula por el HG o pantalla se drena a tierra a través de la resistencia de puesta a tierra de cada torre o en la puesta a tierra de las pantallas del cable. Habitualmente, la distribución de la corriente que retorna a la fuente se expresa mediante un factor denominado “Current Division Factor” S_f en [1] o “factor de reducción” r_E en [3].

2.1 Líneas

La distribución de la corriente entre el HG y la tierra, en el caso de una simple terna, se puede calcular modelando la fase en falla acoplada magnéticamente con el HG para cada vano de la línea (Figura N°3).

Cada tramo de línea entre torres (vano) se puede representar mediante un hexapolo, donde Z_p es la impedancia (con retorno de tierra, mediante el modelo de Carson [17]) de una de las fases de la línea, Z_g es la impedancia con retorno por tierra del HG, Z_0 es la impedancia del terreno considerada igual a cero en este caso, y R_t es la resistencia de la puesta a tierra de las torres. La impedancia Z_m representa el acoplamiento magnético entre el hilo de guardia y la fase.

En el caso más frecuente en las distribuidoras de energía como Edenor, las líneas se construyen Doble Terna, doble Hilo de Guardia. Esto requiere la deducción de otro hexapolo para este caso, según el modelo de la Figura N°4. Ambos HG, representados por las impedancias Z_h y Z_g , están acoplados con la fase en falla y entre ellos. A partir del modelo de las figuras N°3 y N°4 se pueden deducir las matrices de un hexapolo T (ver Anexo I y II), tanto para el caso de simple terna como para el de doble terna.

2.1 Cables

De la misma forma que para las LAT, en los cables existe un acoplamiento magnético entre los conductores y las pantallas. Para la deducción del hexapolo se utiliza un esquema como el que se muestra en la Figura N°5.

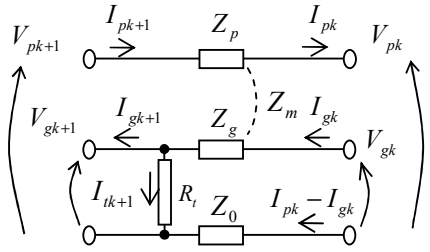


Figura N°3. Hexapolo entre vanos del conductor de fase y el hilo de guardia, LAT de Simple Terna.

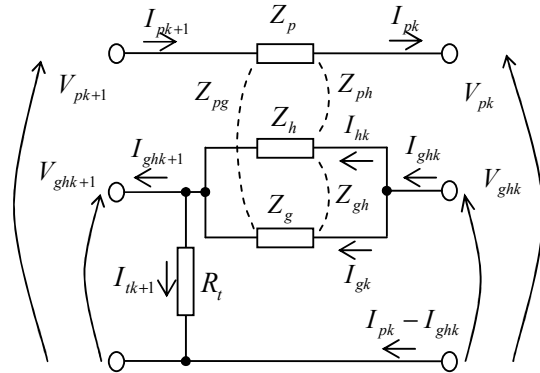


Figura N°4. Hexapolo entre vanos del conductor de fase y el hilo de guardia, LAT de Doble Terna.

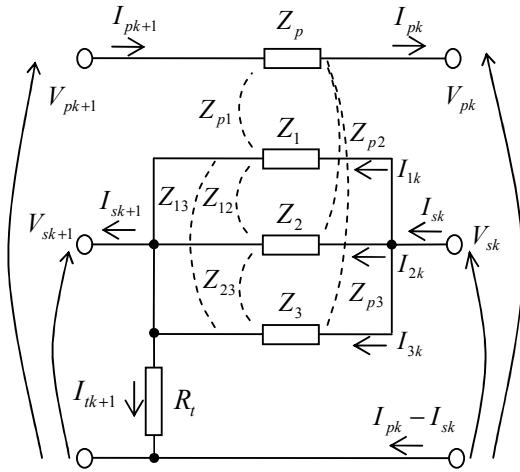


Figura N°5. Hexapolo entre puestas a tierra de un conductor de fase y tres pantallas adyacentes de un cable trifilar de AT.

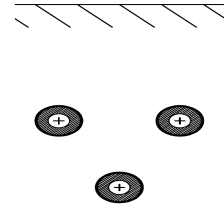


Figura N°6. Configuración espacial muy utilizada de los conductores enterrados

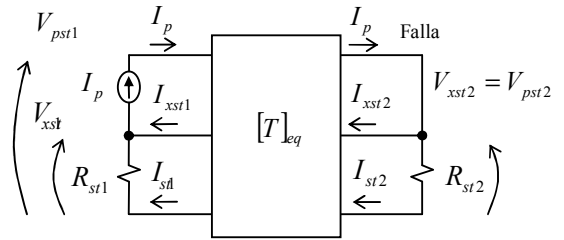


Figura N°7. Circuito equivalente de la subestación de alimentación y de falla conectadas con línea aérea

En la mayoría de las instalaciones subterráneas se elige una configuración espacial equidistante para los conductores como se muestra en la Figura N° 6.

Esta configuración resulta en las siguientes simplificaciones:

$$Z_{p2} = Z_{p3} \quad (1) \quad Z_{13} = Z_{23} = Z_{12} = Z_a \quad (2) \quad Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_s \quad (3)$$

La expresión (1) corresponde al acoplamiento entre la fase fallada y las pantallas de las fases restantes, la (2) al acoplamiento entre pantallas, y la (3) a la impedancia propia de las pantallas.

Esta representación matricial por vano permite la conexión en cascada de los hexapolos de cada vano pudiendo reemplazar cualquier acoplamiento de la fase en falla con el HG o la pantalla a lo largo de todo el electroducto por un hexapolo equivalente $T_{eq} = T^n$, donde "n" es el número de vanos.

De esta forma el circuito conformado por las dos subestaciones y la línea aérea o cable quedaría dispuesto como se muestra en la Figura N°7, como dos circuitos equivalentes de las subestaciones relacionados por el

hexapolo equivalente T_{eq} , donde los subíndices st_1 y st_2 corresponden a la Estación N° 1 y N°2, respectivamente, y los subíndices x a las corrientes que pueden atravesar la pantalla o el HG en cada caso.

La resolución del circuito planteando las ecuaciones de malla y nodo, se pueden ver en el Anexo IV. Esta deducción puede valer tanto para líneas como para cables.

En el caso frecuente de una ET a la que concurren varias LATs o cables, la alimentación de la falla puede provenir de una sola fuente o de fuentes distintas (múltiple alimentación de la falla), dependiendo de la configuración de la red de Alta Tensión. Si la alimentación a la falla proviene de una sola fuente, el resto de las LATs o cables actúan como líneas o cables pasivos, vistas desde la ET, presentando una impedancia de entrada fácilmente calculable mediante la conocida ecuación de una red en escalera (para simple terna) como:

$$Z_{eqLínea} = \frac{Z_g}{2} + \sqrt{R_t \cdot Z_g + 0,25 \cdot Z_g^2} \quad (4) \quad Z_{hg} = \frac{Z_g \cdot Z_h - Z_{hg}^2}{Z_g + Z_h - 2 \cdot Z_{hg}} \quad (5)$$

Donde R_t es la resistencia de la puesta a tierra de las torres de AT.

Para una LAT Doble Terna, Z_g debe reemplazarse por la impedancia equivalente por vano del paralelo de los dos HG (Z_{hg} , Ec. 5).

En el caso de un cable pasivo (que no alimenta la falla), existen dos posibilidades, si se trata de un cable corto (un solo tramo) se reemplaza la $Z_{eqLínea}$ por el paralelo de las impedancias de las pantallas (Z_{ss}) en serie con la resistencia de puesta a tierra en los extremos del cable; mientras que si se trata de un cable largo (varios tramos puestos a tierra en cada extremo) la impedancia se calcula con la expresión (4) reemplazando la Z_g por Z_{ss} . La impedancia Z_{ss} se calcula como:

$$Z_{ss} = \frac{2 \cdot Z_a + Z_s}{3} \quad (6)$$

La línea o cable por donde circula la corriente de falla (por la fase en falla y por el HG, retornando a la fuente) será un electroducto ACTIVO, debiendo modelarse mediante la matriz del hexapolo equivalente antes descrito. Si la alimentación a la falla proviene de dos fuentes distintas, una falla en la barra de la ET será alimentada desde cada fuente (frecuentemente en proporciones también distintas), debiendo entonces modelar las dos líneas o cables activos con el hexapolo equivalente. En la ET en donde se produce la falla se interconectarán tanto los hexapolos equivalentes de cada línea activa, como las impedancias equivalentes de cada línea o cable pasivo, como se indica en la figura N°8.

3. Verificación Computacional con ATP

Se ha implementado el modelo por vano de la figura N°3 y N°4 en ATP para contrastar los resultados obtenidos con el enfoque matricial del Hexapolo. El modelo del ATP se muestra en la Figura N°9 para el caso simple terna. Para la línea por vano se utilizó el bloque LCC del ATP (modelo π). Los datos de impedancias de las líneas propias y mutuas se determinaron a partir del "Line Constant Calculator" de dicho programa. Las impedancias así obtenidas se utilizaron como datos de entrada tanto para la corrida del ATP como para el cálculo matricial, con la finalidad de comparar y uniformizar los resultados.

3.1 Comparación IEEE-80 vs EPRI vs Modelo Hexapolar

Con el objeto de validar el método expuesto se realizó una corrida para el ejemplo que brinda la norma IEEE-80 (año 2000, Fig. 32, pag. 82), según se muestra en la Figura N°8 (para los datos, véase [1]). Los resultados se muestran en la tabla I.

Se observa que el resultado del método hexapolar para este ejemplo está casi en total correspondencia con la distribución de corrientes del método del EPRI, el cual es el más completo ya que es tomado habitualmente como base de comparación, tanto en [1] como en muchos otros trabajos sobre el tema. El ejemplo más complejo de la IEEE-80 (Fig. C23, Pag 163) también coincide con el resultado del EPRI.

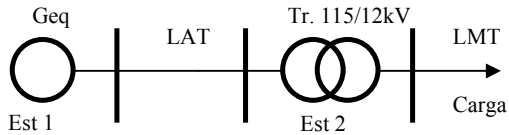


Figura N°8. Esquema Unifilar de ejemplo de la IEEE-80 utilizado para comparación

TABLA I: DATOS DE RESISTENCIA EQUIVALENTES DE MALLAS Y TORRES

Método Utilizado	I_{HG}/I_{FALLA}
IEEE-80(Endrenyi)	0,37
IEEE-80(Garret-Patel)	0,30
EPRI	0,34
Hexapolo	0,338

4. Resultados

Como aplicación del método se tomó primero la configuración de simple terna con un HG de una LAT de 132 kV de Edenor S.A (Figura N°12a):

Las impedancias obtenidas mediante ATP se resumen en la TABLA II. Los datos de las resistencias equivalentes de las mallas de PaT de las Estaciones y de torres de LATs utilizadas se muestran en la TABLA III.

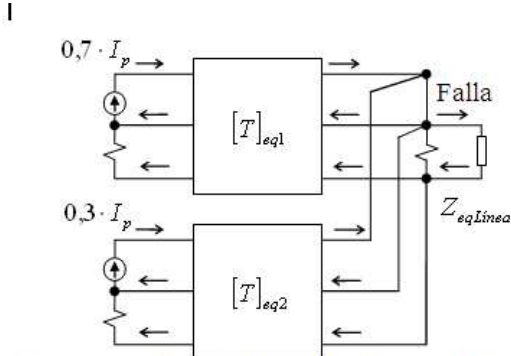


Figura N°9. Circuito equivalente para dos líneas activas y una pasiva (Aporte a la falla del 70% desde una línea y 30% desde la otra).

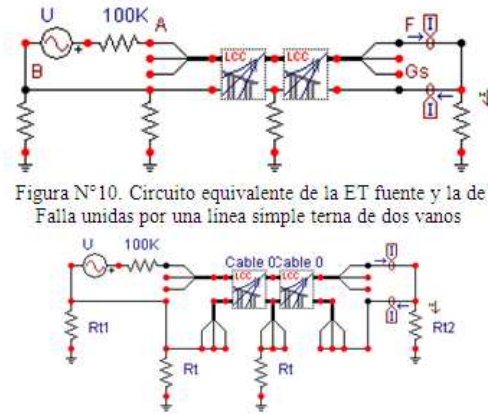


Figura N°10. Circuito equivalente de la ET fuente y la de Falla unidas por una línea simple terna de dos vanos

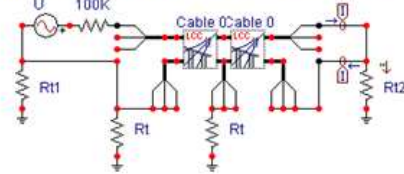


Figura N°11. Circuito equivalente de la ET fuente y la de Falla unidas por una terna de cables unipolares dividida en dos tramos.

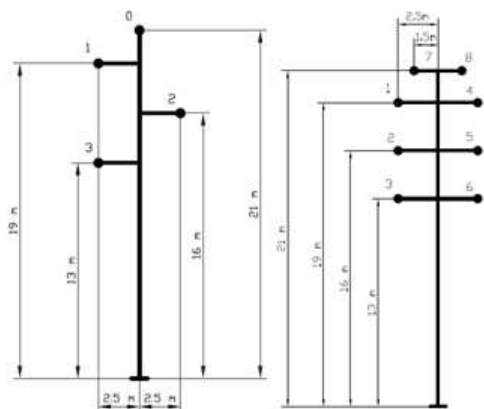


Figura N°12. a) Disposición de una Línea de AT en Simple Terna con 1 HG y b) Doble Terna con 2 HG.

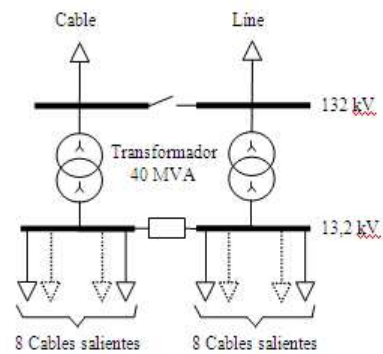


Figura N°13. ESQUEMA H de una subestación de EDENOR de 132 kV a 13,2 kV con un Cable y una Línea de entrada en 132 kV y 16 Cables de salida de 13,2 kV.

TABLA II: DATOS DE UNA LAT 132kV–
SIMPLE TERNA

Impedancia	Z [Ω /km]
Fase	0,1659 + j 0,4061
Hilo de Guardia	1,8887 + j 0,4063
Mutua Fase-HG	0,0468 + j 0,3480

TABLA III: DATOS DE RESISTENCIA
EQUIVALENTES DE MALLAS Y TORRES

Resistencias equivalentes	Z [Ω]
Estaciones 1 y 2 (R_{st1} y R_{st2})	0,5
Torres de LAT	3

Como primer resultado se muestra en el siguiente gráfico (Figura N°14) la variación de la relación I_{HG}/I_{FALLA} en función del número de vanos que se tomen para modelar la LAT y en función del N° de LAT pasivas (Figura N°15). Se desprende que sólo es necesario contemplar 9 vanos de la LAT de este ejemplo, dado que la proporción de corriente que se deriva por el HG tiende a un valor constante luego de 9 vanos (para R_{torre} mayores, se incrementa el N° de vanos a incluir en el modelo, pero, para los valores utilizados en la práctica, nunca es necesario incluir todos los vanos de la línea).

La distribución de corriente de falla en una ET alimentadas desde dos fuentes distintas se observa en la Figura N°17.

Cómo segundo ejemplo se tomó la doble terna de la Figura N°12b. Los datos de impedancias calculadas en esta LAT se muestran en la Tabla IV.

TABLA IV: DATOS DE UNA LAT 132kV–
DOBLE TERNA

Impedancia	Z [Ω /km]
Fase	0,1659 + j0,4061
Hilo de Guardia 1	1,8887 + j0,4063
Hilo de Guardia 2	1,8887 + j0,4063
Mutua Fase-HG 1	0,0468 + j0,3706
Mutua Fase-HG 2	0,0468 + j0,3270
Mutua HG 1- HG 2	0,0467 + j0,3522

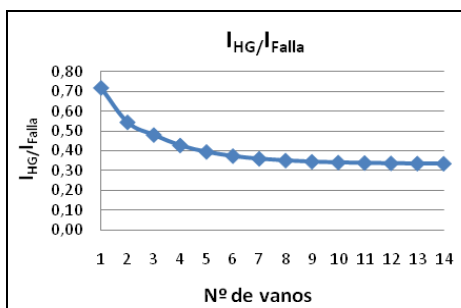
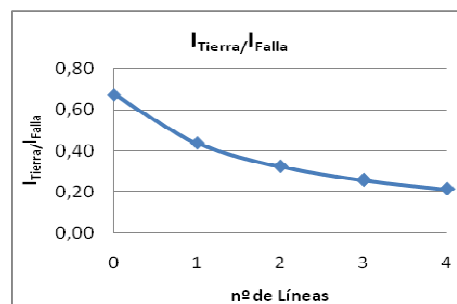


Figura N°14. Relación de corrientes en función del n° de vanos (simple terna)



En la Figura N°15 se muestra el previsible efecto de reducción de la corriente derivada por la tierra al agregar líneas pasivas conectadas a la malla de tierra de la ET en falla (simple terna).

Como era de esperar, la línea doble terna presenta una menor impedancia a la circulación de la corriente de retorno por los HG que en el caso simple terna, debido al acoplamiento inductivo de los HG entre sí y con la fase en falla.

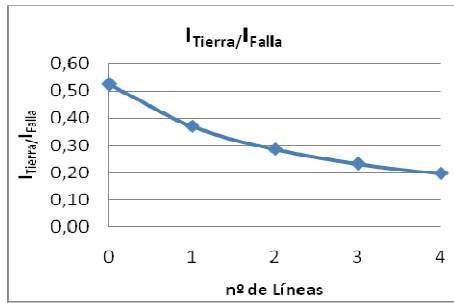


Figura N°16. Corriente derivada a tierra en la ET en falla con 2 ET fuente, en función de la cantidad de líneas pasivas conectadas (simple terna)

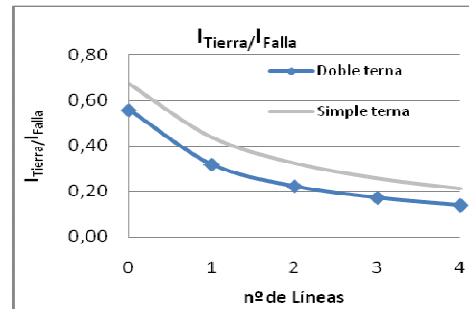


Figura N°17. Corriente derivada a tierra en la ET en falla en función de la cantidad de líneas pasivas conectadas (doble terna)

Para el caso de una ET alimentada por un Cable se modeló en el ATP una terna de cables enterrados unipolares equiespaciados con el bloque LCC al igual que la LAT, obteniéndose así los parámetros del cable tales como las impedancias propias y mutuas que se pueden ver en la Figura N°5. El circuito en el ATP se muestra en la Figura N°11.

Las impedancias obtenidas mediante ATP para un cable de MT de 13,2 kV y de AT de 132kV se resumen en las siguientes tablas:

TABLA V: DATOS DE UN CABLE 13,2kV

Impedancia	Z [Ω /km]
Fase	0,242 + j0,772
Pantalla	0,479 + j0,711
Mutua entre Pantallas	0,049 + j0,606
Mutua Fase1-Pantalla1	0,049 + j0,711
Mutua Fase1-Pantalla2 o 3	0,049 + j0,606

TABLA VI: DATOS DE UN CABLE 132kV

Impedancia	Z [Ω /km]
Fase	0,109 + j0,735
Pantalla	0,386 + j0,646
Mutua entre Pantallas	0,049 + j0,522
Mutua Fase1-Pantalla1	0,049 + j0,647
Mutua Fase1-Pantalla2 o 3	0,049 + j0,522

Los valores de las resistencias equivalentes de las mallas de PaT de las Estaciones y de las puestas a tierra en los empalmes de los Cables utilizadas fueron las mismas que las utilizadas en las LATs.

Como ejemplo se optó por una configuración de una subestación tipo ESQUEMA H de EDENOR que se muestra en la Figura N°13.

Tanto los HG de las líneas como las pantallas de los cables de MT y AT, están conectados a la malla de puesta a tierra de la subestación. En este caso se asumió que el Cable de 132 kV es el que alimenta ambos transformadores y la línea de 132 kV es una salida más.

Para el cálculo se debe utilizar una impedancia equivalente de PAT de la SE compuesta por el paralelo de las pantallas de los cables de MT, del HG de la línea y la Resistencia PAT de la SE.

El coeficiente S_f calculado mediante el método matricial difiere en un 0,7% con respecto al resultado de la simulación con el ATP.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado el desarrollo de un método práctico, preciso y rápido para que el proyectista de Estaciones Transformadoras pueda calcular la corriente a considerar en el diseño de la malla de puesta a tierra de la estación, sin recurrir a complejas programaciones ni costosos programas comerciales. El método permite calcular el porcentaje de corriente que retorna por tierra y por los HG, tanto para Simple o Doble

Terna, Cables de AT ó MT, para fallas alimentadas de desde una o dos fuentes simultáneas. Se han expuesto detalladamente las matrices a utilizar y el procedimiento a seguir y se han verificado todos los resultados mediante la simulación computacional con ATP.

6. Bibliografía

- [1] IEEE-Std. 80, IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding, 2000
- [2] BS 7430, Code of Practice for Earthing
- [3] VDE 141, Earthing Systems for Special Power Installations with Nominal Voltages Above 1 kV.
- [4] Endrenyi J, "Analysis of Transmission Tower Potentials During Ground Faults", IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 86, N°10, Oct. 1967.
- [5] Desieno C., Marchenko P., Vassel G, "General Equations for Fault Currents in Transmission Line Ground Wires", IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 89, N°8, Nov-Dic 1970.
- [6] Verma R., Mukhedkar D., "Ground Fault Current Distribution in Substation, Towers and Ground Wire", IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 98, N°3, May-Jun 1979.
- [7] Nahman J., "Proximity effects on the Ground Fault Current Distribution within the Earthing Systems formed by a Substation and the associated Transmission Lines", IEE Proceedings, Vol. 135, Pt C, N°6, Nov 1988.
- [8] Popovic Lj, "General Equations of the line represented by Discrete Parameters – Part I – Steady State" y "Part II – Resonant Phenomena", IEEE Trans. On Power Delivery, Vol. 6, N°1, Ene 1991.
- [9] Popovic Lj, "Analytical Expressions for Evaluating Screening effect of Transmission Line Earth Wire", IEE Proceedings, Vol. 138, Pt C, N°4, Jul 1991.
- [10] Seedher H., Arora J., Soni S., "A Practical approach for Computation of Grid Current", IEEE Trans. On Power Delivery, Vol. 14, N°3, Jul 1999.
- [11] Viel E., Griffiths H., "Fault Current Distribution in HV cable Systems", IEE Proceedings Transm. Distrib., Vol. 147, N°4, Jul 2000.
- [12] Dawalibi, F. "Ground Fault Current Distribution between soil and Neutral conductors", IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 99, N°2, Mar-abril 1980.
- [13] Rifaldi A., "Las redes de tierra de grandes Estaciones Eléctricas", Revista Electrotecnia, Ene-Feb 1979.
- [14] Sebo S. "Zero-Sequence Current Distribution Along Transmission Lines", IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 88, N°6, Jun 1969.
- [15] Gooi, H.B.; Sebo, S.A. Sebo S. "Distribution of Ground Fault Currents Along Transmission Lines -- An Improved Algorithm", IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 104, N°3, March 1985.
- [16] Langrehr H., Valores Básicos de Cálculo para Sistemas de Alta Tensión, AEG-TELEFUNKEN, 1970.
- [17] Carson, J. R., "Wave propagation in overhead wires with ground return," Bell Systems Technical Journal, Vol. 5, 1926.

Anexo I: Deducción del Hexapolo-Simple Terna

Las ecuaciones de tensión que describen el hexapolo son (Figura N°2):

$$\begin{cases} V_{pk+1} - I_{pk} \cdot Z_p + I_{gk} \cdot Z_m - V_{pk} = 0 & (A1) \quad (1) \\ V_{gk+1} - I_p \cdot Z_m + I_{gk} \cdot Z_g - V_{gk} = 0 & (A2) \quad (2) \\ I_{gk} = I_{tk} + I_{gk+1} & (A3) \quad (3) \end{cases} \quad \text{también:} \quad I_{tk} = \frac{V_{gk+1}}{R_t} \quad (A4)$$

Si se reemplaza (4) y (2) en (3) se obtiene:

$$I_{gk} = \frac{1}{R_t} [I_p \cdot Z_m - I_{gk} \cdot Z_g + V_{gk}] + I_{gk+1} \quad (A5) \quad I_{gk} = I_p \cdot \frac{Z_m}{R_t} - I_{gk} \cdot \frac{Z_g}{R_t} + \frac{V_{gk}}{R_t} + I_{gk+1} \quad (A6)$$

Reordenando la ecuación anterior:

$$I_{gk+1} = -\frac{1}{R_t} \cdot V_{gk} - \frac{Z_m}{R_t} \cdot I_p + \left(1 + \frac{Z_g}{R_t}\right) \cdot I_{gk} \quad (A7)$$

Tomando las ecuaciones (1), (2) y (5) se puede armar la siguiente ecuación matricial que relaciona las tensiones y corrientes de entrada del hexapolo con las de salida a través de la matriz T:

$$\begin{bmatrix} V_{pk+1} \\ V_{gk+1} \\ I_p \\ I_{gk+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Z_p & -Z_m \\ 0 & 1 & Z_m & -Z_g \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_t} & -\frac{Z_m}{R_t} & 1 + \frac{Z_g}{R_t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{pk} \\ V_{gk} \\ I_p \\ I_{gk} \end{bmatrix} = [L_{k+1}] = [T] \cdot [R_k] \quad (A9)$$

Anexo II: Dedución del Hexapolo-Doble Terna. De la Figura N°4, se pueden escribir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} V_{pk+1} - I_p \cdot Z_p + I_{hk} \cdot Z_{ph} + I_{gk} \cdot Z_{pg} - V_{pk} = 0 \\ V_{ghk+1} - I_p \cdot Z_{ph} + I_{hk} \cdot Z_h + I_{gk} \cdot Z_{gh} - V_{ghk} = 0 \\ V_{ghk+1} - I_p \cdot Z_{pg} + I_{hk} \cdot Z_{hg} + I_{gk} \cdot Z_g - V_{ghk} = 0 \\ V_{ghk+1} - I_{ik+1} \cdot R_t = 0 \\ I_{ghk} - I_{pk} - I_{hk} = 0 \\ I_{ghk+1} + I_{ik+1} - I_{ghk} = 0 \end{cases} \quad (A10) \quad \begin{bmatrix} V_{pk+1} \\ V_{ghk+1} \\ I_p \\ I_{ghk+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Z_p - k_2 Z_{ph} + k_2 Z_{pg} & -k_1 Z_{ph} - k_3 Z_{pg} \\ 0 & 1 & Z_{ph} - k_2 Z_h + k_2 Z_{hg} & -k_1 Z_h - k_3 Z_{hg} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_t} & \frac{k_2 Z_h - Z_{ph} - k_2 Z_{hg}}{R_t} & \frac{k_1 Z_h + k_3 Z_{hg}}{R_t} + 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{pk} \\ V_{ghk} \\ I_p \\ I_{ghk} \end{bmatrix} \quad (A11)$$

A partir de dichas ecuaciones y luego de una laboriosa deducción se tiene la matriz de cascada (A11) [T], donde:

$$k_1 = \frac{Z_g - Z_{hg}}{Z_h + Z_g - 2 \cdot Z_{hg}} \quad k_2 = \frac{Z_{ph} - Z_{pg}}{Z_h + Z_g - 2 \cdot Z_{hg}} \quad k_3 = 1 - k_1 \quad (A12)$$

Anexo III: Dedución del Hexapolo-Cable

De la Figura N°5 del circuito equivalente del cable, y de las simplificaciones debidas a la simetría, se pueden escribir las siguientes ecuaciones de mallas y nodos:

$$\begin{cases} V_{pk+1} - I_p \cdot Z_p + I_1 \cdot Z_{p1} + I_2 \cdot Z_{p2} + I_3 \cdot Z_{p2} - V_{pk} = 0 \\ V_{sk+1} - I_p \cdot Z_{p1} + I_1 \cdot Z_s + I_2 \cdot Z_a + I_3 \cdot Z_a - V_{sk} = 0 \\ I_p \cdot (Z_{p2} - Z_{p1}) + I_2 \cdot (Z_a - Z_s) + I_1 \cdot (Z_s - Z_a) = 0 \\ I_2 \cdot (Z_s - Z_a) + I_3 \cdot (Z_a - Z_s) = 0 \\ V_{sk+1} = I_{ik+1} \cdot R_t \\ I_{sk} = I_1 + I_2 + I_3 \\ I_{sk+1} = I_{sk} - I_{ik+1} \end{cases} \quad (A13) \quad \begin{bmatrix} V_{pk+1} \\ V_{sk+1} \\ I_p \\ I_{sk+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Z_p + 2 \cdot A \cdot Z_{p1} - 2 \cdot A \cdot Z_{p2} & -\frac{Z_{p1}}{3} - \frac{2}{3} \cdot Z_{p2} \\ 0 & 1 & Z_{p1} + 2 \cdot A \cdot Z_s - 2 \cdot A \cdot Z_a & -\frac{Z_s}{3} - \frac{2}{3} \cdot Z_a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_t} & \frac{-Z_{p1} - 2 \cdot A \cdot Z_s + 2 \cdot A \cdot Z_a}{R_t} & \frac{Z_s + 2}{3} \cdot \frac{Z_a}{R_t} + 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{pk} \\ V_{sk} \\ I_p \\ I_{sk} \end{bmatrix} \quad (A14)$$

$$\text{donde: } A = \frac{Z_{p1} - Z_{p2}}{3 \cdot (Z_a - Z_s)} \quad (A15)$$

Anexo IV: Dedución de la matriz final de resolución: Partiendo de la matriz en cascada deducida en los Anexos I, II y III que relaciona las tensiones y corrientes en cada vano, se puede armar la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} V_{pk+1} \\ V_{xk+1} \\ I_p \\ I_{xk+1} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} V_{pk} \\ V_{xk} \\ I_p \\ I_{xk} \end{bmatrix} \quad (A16), \quad \text{Lo que es lo mismo que: } [L_{k+1}] = [T] \cdot [R_k] \quad (A17)$$

Una línea está formada por muchos vanos conectados en cascada. Esto implica que las matrices T deban ser multiplicadas para poder describir la totalidad de la línea desde el vano 1 hasta el vano n:

$$\begin{aligned} [L_{n+1}] &= [T] \cdot [R_n] = [T] \cdot [L_n] \\ [L_{n+1}] &= [T] \cdot [T] \cdot [R_{n-1}] = [T] \cdot \dots \cdot [T] \cdot [R_1] \\ [L_{n+1}] &= [T]^n \cdot [R_1] = [T]_{eq} \cdot [R_1] \end{aligned} \quad (A18)$$

La ecuación matricial que relaciona la subestación fuente y la que está en falla a través de $[T]_{eq}$ es:

$$\begin{bmatrix} V_{pst1} \\ V_{gst1} \\ I_p \\ I_{gst1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{pst2} \\ V_{gst2} \\ I_p \\ I_{gst2} \end{bmatrix} \quad (A19)$$

Se considera que la impedancia de falla es nula o despreciable frente a las restantes impedancias. Entonces, de la Figura N°7 se puede deducir que en la subestación en falla se cumple:

$$\begin{aligned} V_{pst2} &= V_{gst2} \\ I_{st2} &= I_p - I_{xst2} \end{aligned} \quad (A20)$$

Combinando las ecuaciones anteriores se puede reescribir (A20) como:

$$V_{gst2} = (I_p - I_{gst2}) \cdot R_{st2} \quad (A21)$$

Mientras que en la subestación de alimentación las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} I_{st1} &= I_p - I_{xst1} \\ V_{xst1} &= I_{st1} \cdot R_{st1} \end{aligned} \quad (A22)$$

Reescribiendo las ecuaciones anteriores se tiene:

$$V_{gst1} = (I_p - I_{gst1}) \cdot R_{st1} \quad (A23)$$

Si al conjunto de ecuaciones relacionadas por $[T]_{eq}$ se le agregan la (A21), (A22) y (A23) se obtiene una ecuación matricial que relaciona las tensiones y corriente en las subestaciones con los parámetros conocidos de la línea y la corriente de falla:

$$\begin{bmatrix} -T_{13} \cdot I_p \\ -T_{23} \cdot I_p \\ -T_{43} \cdot I_p \\ 0 \\ R_{st2} \cdot I_p \\ -R_{st1} \cdot I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & T_{11} & T_{12} & T_{14} \\ 0 & -1 & 0 & T_{21} & T_{22} & T_{24} \\ 0 & 0 & -1 & T_{41} & T_{42} & T_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & R_{st2} \\ 0 & 1 & -R_{st1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{pst1} \\ V_{gst1} \\ I_{gst1} \\ V_{pst2} \\ V_{gst2} \\ I_{gst2} \end{bmatrix} \quad (A24)$$

De la cual se puede despejar la incógnita buscada I_{st2} , esta corriente dividida por la corriente de falla I_p , da como resultado el coeficiente S_f .