

Modelado matemático de la curva de rendimiento de una Unidad Generadora Hidroeléctrica

P. Cabrera, G. Cuenca, A. Arce, L. Barrientos

Universidad Nacional del Este – Facultad Politécnica

Paraguay

RESUMEN

El horizonte del planeamiento de la operación de un sistema hidrotérmico de generación depende fundamentalmente de las características hidrológicas y capacidad de regulación de los embalses de las centrales hidroeléctricas. Normalmente el horizonte del planeamiento debe cubrir por lo menos un año, tiempo que dura el ciclo hidrológico.

En el planeamiento de la operación de mediano y largo plazo son definidos en cada etapa el total de la energía a ser producida y la participación de las diferentes fuentes de generación, buscando atender la demanda al menor costo posible.

El planeamiento de la operación de corto plazo busca compatibilizar la operación hidráulica y eléctrica a lo largo del día o la semana con las metas energéticas definidas en el planeamiento de mediano plazo. Debido a su proximidad a la operación en tiempo real, el planeamiento de la operación de corto plazo y programación diaria requieren de una representación matemática más detallada de los diferentes componentes del sistema, tales como la red eléctrica, el sistema hidráulico, tiempo de viaje del agua, capacidad de almacenamiento de los embalses y fundamentalmente la generación hidroeléctrica, cuya representación está compuesta por variables interrelacionadas.

Este trabajo está situado en el contexto del planeamiento de la operación de corto plazo, programación diaria y de operación en tiempo real, trata de la generación hidroeléctrica.

De estas variables, el rendimiento de la turbina, que por la forma geométrica de su superficie se lo llama de Curva Colina, depende del salto líquido y del caudal turbinado. El salto líquido es la diferencia entre el nivel del embalse, el nivel del canal de fuga y las pérdidas hidráulicas. El nivel del canal de fuga depende del caudal turbinado. Esta interrelación de las variables lleva a que una evaluación de su desempeño sea realizada por procesos iterativos. El rendimiento de una turbina hidroeléctrica puede variar entre 45 a 96 %, lo cual hace que su representación adecuada sea de vital importancia para optimizar su desempeño.

La Curva Colina es elaborada por el fabricante en base a pruebas de desempeño, cubriendo con valores discretos toda la faja de valores de salto líquido y de caudal turbinado, pudiendo muchas veces la operación caer en puntos no cubierto en la Curva Colina. A los efectos de superar esta dificultad, en este trabajo fue analizada la forma más adecuada de obtener la representación de la Curva Colina a través de una o más funciones continuas, entre ellas técnicas de regresión lineal múltiple.

Los resultados obtenidos muestran buena adaptación del modelo a los valores discretos que se obtienen en la curva colina, bien como su aplicación para estudios de simulaciones.

PALABRAS CLAVE

Generación hidroeléctrica, función de producción, curva colina, regresión lineal múltiple.

**XIV SEMINARIO DEL SECTOR ELECTRICO PARAGUAYO - CIGRE
23 y 24 de Junio 2022**

1. INTRODUCCION

En el planeamiento de la operación a corto y mediano plazo de los sistemas hidrotérmicos, los factores de rendimiento de la unidad generadora generalmente se consideran constantes. Sin embargo, cuando la generadora hidroeléctrica tiene como tarea el despacho horario de acuerdo a un determinado objetivo, diario o semanal fijado por el operador del sistema, es esencial tener en cuenta las variaciones del factor de rendimiento de la unidad con respecto a las condiciones de operación.

El rendimiento de la turbina es una función no lineal que representa las pérdidas verificadas en ella [1]. En 2005, Finardi y otros [2], mostraron que el modelado de la función de rendimiento de una unidad generadora puede ser descripta por una función cuadrática dependiente del salto líquido y del caudal turbinado.

En el 2007, A. L. Diniz y otros [3], estudiaron dos modelos matemáticos para obtener la función de rendimiento de una turbina hidráulica, los coeficientes de dicho modelo fueron calculados por regresión lineal utilizando como datos de entrada puntos extraídos de la curva colina típica de la turbina. Para cada modelo diferentes variantes fueron considerados con el fin de satisfacer algunas condiciones específicas.

2. FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN

El proceso de producción de energía hidroeléctrica inicia aprovechando la energía potencial del agua acumulada en un embalse, transformada a energía cinética con el flujo del agua por el conducto forzado; luego, el elemento que transforma parte de esta energía en trabajo mecánico es la turbina, en cuyo rodete se tiene lugar el intercambio de energía entre el agua y la máquina [4].

Partiendo de la definición de potencia como la energía producida por unidad de tiempo, se puede expresar la potencia producida en una usina hidroeléctrica a través de la siguiente relación matemática [1]:

$$p = g \times \rho \times 10^{-3} \times \eta_t \times \eta_g \times h_l \times q \quad (1)$$

donde se puede apreciar que la generación depende del caudal turbinado (q), la eficiencia de la turbina (η_T) y del generador (η_G), y del salto líquido (h_l). Los demás componentes (g), (ρ) y (10^{-3}), aceleración de la gravedad, peso específico del agua y constante de transformación de unidades respectivamente, son constantes.

2.1 Eficiencia de la Turbina

Representa las pérdidas verificadas en la turbina hidráulica, siendo una medida de la relación entre la energía mecánica de rotación producida y la energía potencial del agua descargada. Es una función no lineal representada normalmente como dependiente del caudal turbinado y del salto líquido [1]. Por su formato es llamada curva colina, conforme se puede observar en la Figura 1.

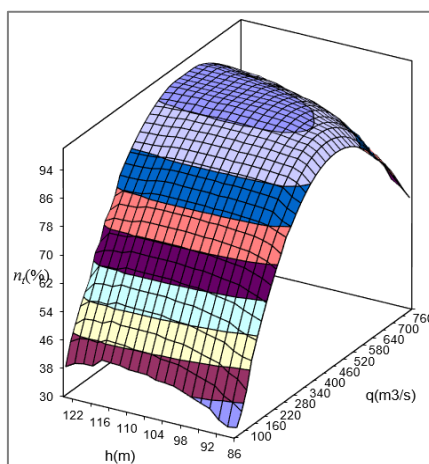


Figura 1: Curva colina típica de una turbina hidráulica

XIV SEMINARIO DEL SECTOR ELECTRICO PARAGUAYO - CIGRE
23 y 24 de Junio 2022

2.2 Rendimiento del Generador

La transformación de la energía mecánica en energía eléctrica por el generador no ocurre directamente, debido a que en esa transformación también se verifican pérdidas en el bobinado, pérdidas mecánicas provocadas por la fricción en las escobas del sistema de excitación, pérdidas en los cojinetes y sistema de ventilación; además de pérdidas provocadas por la histéresis y corrientes de Foucault, originadas por la variación de la densidad del flujo magnético en el hierro del generador [5]. Los generadores modernos presentan rendimientos que van de 0,90 a 0,98 [1], aunque en la faja donde típicamente opera una unidad generadora, dicho rendimiento ya se estabiliza en aproximadamente 0,97~0,98.

3. METODOLOGIA

3.1 Modelos matemáticos básicos

Para el ajuste del factor de eficiencia de la turbina, fueron utilizados dos modelos básicos. El modelo A es el representado en [2], mientras que el modelo B se representa como un polinomio de cuarto grado derivado del modelo A mediante adición de algunos términos [3].

Modelo A

$$\eta = a_{00} + a_{10}h_l + a_{01}q + a_{11}h_lq + a_{20}h_l^2 + a_{02}q^2 \quad (2)$$

Modelo B

$$\eta = b_{00} + b_{10}h_l + b_{01}q + b_{11}h_lq + b_{20}h_l^2 + b_{02}q^2 + b_{21}h_l^2q + b_{12}h_lq^2 + b_{22}h_l^2q^2 \quad (3)$$

En estas expresiones, los subíndices de los coeficientes corresponden al grado de cada término en las variables h_l y q , respectivamente. La letra indica el modelo al que pertenece el coeficiente.

3.2 Metodología de estimación de puntos

Otra propuesta es la de estimar puntos a través de un método utilizado en [6]:

- Dado un salto líquido, levantar puntos de rendimiento para diferentes valores de caudal turbinado y ajustar una función del tipo:

$$\eta(q)|_{h_1} = a_1q^2 + b_1q + c_1 \quad (4)$$

- Repetir el proceso de ajuste abarcando toda la faja operativa en términos de salto líquido.
- Con los coeficientes $[a_1, \dots, a_n]$ ajustar una función del tipo:

$$k_a(h_l) = \beta_{1a}h_l^2 + \beta_{2a}h_l + \beta_{3a} \quad (5)$$

- Realizar el mismo ajuste para el conjunto de coeficientes $[b_1, \dots, b_n]$ y $[c_1, \dots, c_n]$.

$$k_b(h_l) = \beta_{1b}h_l^2 + \beta_{2b}h_l + \beta_{3b} \quad (6)$$

$$k_c(h_l) = \beta_{1c}h_l^2 + \beta_{2c}h_l + \beta_{3c} \quad (7)$$

- De ese modo se obtiene el siguiente polinomio, a la cual se le denominará *Est2*, para la obtención de puntos de rendimiento:

$$\eta(q, h_l) = k_a(h_l)q^2 + k_b(h_l)q + k_c(h_l) \quad (8)$$

En el trabajo también son ajustados polinomios de órdenes superiores *Est3* y *Est4*, obtenidos de manera análoga al descrito en la presente sección:

$$\eta(q, h_l) = k_a(h_l)q^3 + k_b(h_l)q^2 + k_c(h_l)q + k_d(h_l) \quad (9)$$

$$\eta(q, h_l) = k_a(h_l)q^4 + k_b(h_l)q^3 + k_c(h_l)q^2 + k_d(h_l)q + k_e(h_l) \quad (10)$$

XIV SEMINARIO DEL SECTOR ELECTRICO PARAGUAYO - CIGRE
23 y 24 de Junio 2022

4. RESULTADOS

4.1 Datos utilizados

En esta sección se presentan los datos obtenidos para el ajuste de los modelos *A*, *B*, *Est2*, *Est3* y *Est4*. Los datos obtenidos mediante la extracción de datos son mostrados en la Figura 2.

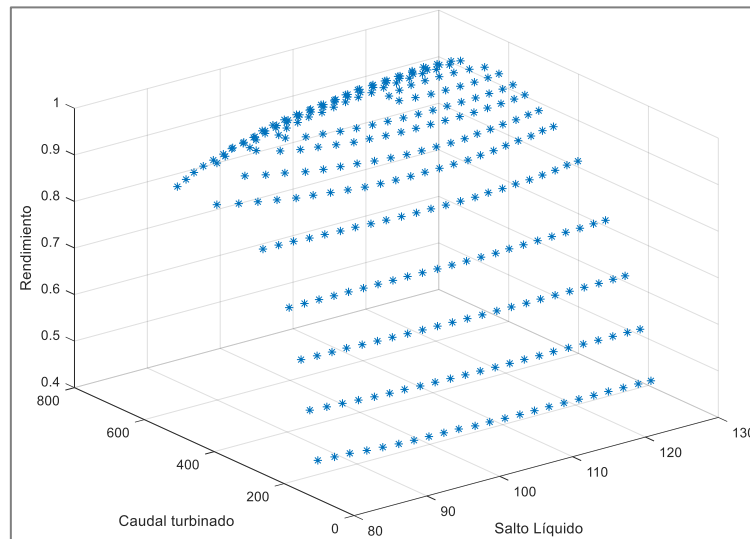


Figura 2: Datos extraídos (documentados en papel)

4.2 Resultados de los modelos

La Tabla I muestra los coeficientes obtenidos para los modelos básicos *A* y *B*, mientras que la Tabla II muestra los coeficientes utilizados para las funciones $k(h)$ de los modelos *Est2*, *Est3* y *Est4*.

Tabla I: Coeficientes para los modelos matemáticos

<i>Coefficientes</i>	<i>A</i>	<i>Coefficientes</i>	<i>B</i>
a_{00}	$-3,7067 \times 10^{-1}$	b_{00}	-2,1764
a_{10}	$9,9175 \times 10^{-3}$	b_{10}	$3,7386 \times 10^{-2}$
a_{01}	$2,7350 \times 10^{-3}$	b_{01}	$1,4359 \times 10^{-2}$
a_{11}	$3,2481 \times 10^{-6}$	b_{11}	$-1,7451 \times 10^{-4}$
a_{20}	$-4,8340 \times 10^{-5}$	b_{20}	$-1,4837 \times 10^{-4}$
a_{02}	$-2,8309 \times 10^{-6}$	b_{02}	$-1,8655 \times 10^{-5}$
		b_{21}	$6,5350 \times 10^{-7}$
		b_{12}	$2,4656 \times 10^{-7}$
		b_{22}	$-9,3182 \times 10^{-10}$

XIV SEMINARIO DEL SECTOR ELECTRICO PARAGUAYO - CIGRE
 23 y 24 de Junio 2022

Tabla II: Coeficientes para los polinomios $k(h)$

		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
Estimado Segunda Orden	$k_a(h_l)$	-1.6735×10^{-9}	4.0853×10^{-7}	-2.7401×10^{-5}		
	$k_b(h_l)$	1.1720×10^{-6}	-2.8766×10^{-4}	2.0464×10^{-2}		
	$k_c(h_l)$	-2.2365×10^{-4}	5.3811×10^{-2}	-3.0624		
Estimado Tercer Orden	$k_a(h_l)$	-6.6256×10^{-13}	2.2108×10^{-10}	-2.4590×10^{-8}	9.1576×10^{-7}	
	$k_b(h_l)$	7.7782×10^{-10}	-2.5917×10^{-7}	2.8814×10^{-5}	-1.0770×10^{-3}	
	$k_c(h_l)$	-2.8364×10^{-7}	9.4357×10^{-5}	-1.0483×10^{-2}	3.9402×10^{-1}	
	$k_d(h_l)$	3.1505×10^{-5}	-1.0519×10^{-2}	1.1733	-43.799	
Estimado Cuarto Orden	$k_a(h_l)$	-3.6409×10^{-17}	16050×10^{-14}	-2.6546×10^{-12}	1.9567×10^{-10}	-5.4480×10^{-9}
	$k_b(h_l)$	6.7627×10^{-14}	-2.9924×10^{-11}	4.9631×10^{-9}	-3.6645×10^{-7}	1.0210×10^{-5}
	$k_c(h_l)$	-4.4798×10^{-11}	1.9922×10^{-8}	-3.3177×10^{-6}	2.4573×10^{-4}	-6.8638×10^{-3}
	$k_d(h_l)$	1.2362×10^{-8}	-5.5280×10^{-6}	9.2503×10^{-4}	-6.8786×10^{-2}	1.9296
	$k_e(h_l)$	-1.1511×10^{-6}	5.1824×10^{-4}	-8.7305×10^{-2}	$6.5356e$	-184.0775

En la Tabla III, se muestran las desviaciones absolutas promedio de los modelos estudiados, para las diferentes fajas de rendimiento de la curva colina.

Tabla III: Desviación absoluta promedio

η (%)	A	B	Est2	Est3	Est4
95 a 96	$1,6973 \times 10^{-2}$	$1,3806 \times 10^{-2}$	$1,4848 \times 10^{-2}$	$0,8197 \times 10^{-2}$	$0,2206 \times 10^{-2}$
92 a 94	$1,2440 \times 10^{-2}$	$1,3415 \times 10^{-2}$	$1,4064 \times 10^{-2}$	$1,0978 \times 10^{-2}$	$0,2895 \times 10^{-2}$
85 a 90	$2,0093 \times 10^{-2}$	$1,9137 \times 10^{-2}$	$1,9064 \times 10^{-2}$	$0,8457 \times 10^{-2}$	$0,1981 \times 10^{-2}$
45 a 75	$4,3049 \times 10^{-2}$	$2,9711 \times 10^{-2}$	$2,7442 \times 10^{-2}$	$0,5390 \times 10^{-2}$	$0,4034 \times 10^{-2}$
Promedio	$1,8212 \times 10^{-2}$	$1,6182 \times 10^{-2}$	$1,6528 \times 10^{-2}$	$0,9139 \times 10^{-2}$	$0,2638 \times 10^{-2}$

Se puede observar que, en las distintas fajas de rendimiento, los modelos que tienen una menor desviación absoluta promedio con respecto a los datos documentados en papel son el modelo B y los modelos definidos con el método de estimación Est3 y Est4.

Los datos en la Tabla IV concuerdan con lo anterior, donde los modelos que mejor se aproximan a los valores de la curva colina real son el modelo B y los polinomios definidos con el método de estimación Est3 y Est4.

Tabla IV: Coeficiente de determinación de los modelos A, B y los polinomios de estimación

Modelo matemático	Coficiente de determinación R^2
A	0,94244
B	0,96219
Est2	0,96161
Est3	0,98840
Est4	0,99887

En la Figura 3 se muestra el error porcentual de cada uno de los puntos calculados por los distintos modelos, con relación a los puntos extraídos de la curva colina real; y se muestra que, efectivamente, los modelos con el menor desvío absoluto son los que tienen la mayor cantidad de puntos dentro de la franja de error menor a 3%.

XIV SEMINARIO DEL SECTOR ELECTRICO PARAGUAYO - CIGRE
23 y 24 de Junio 2022

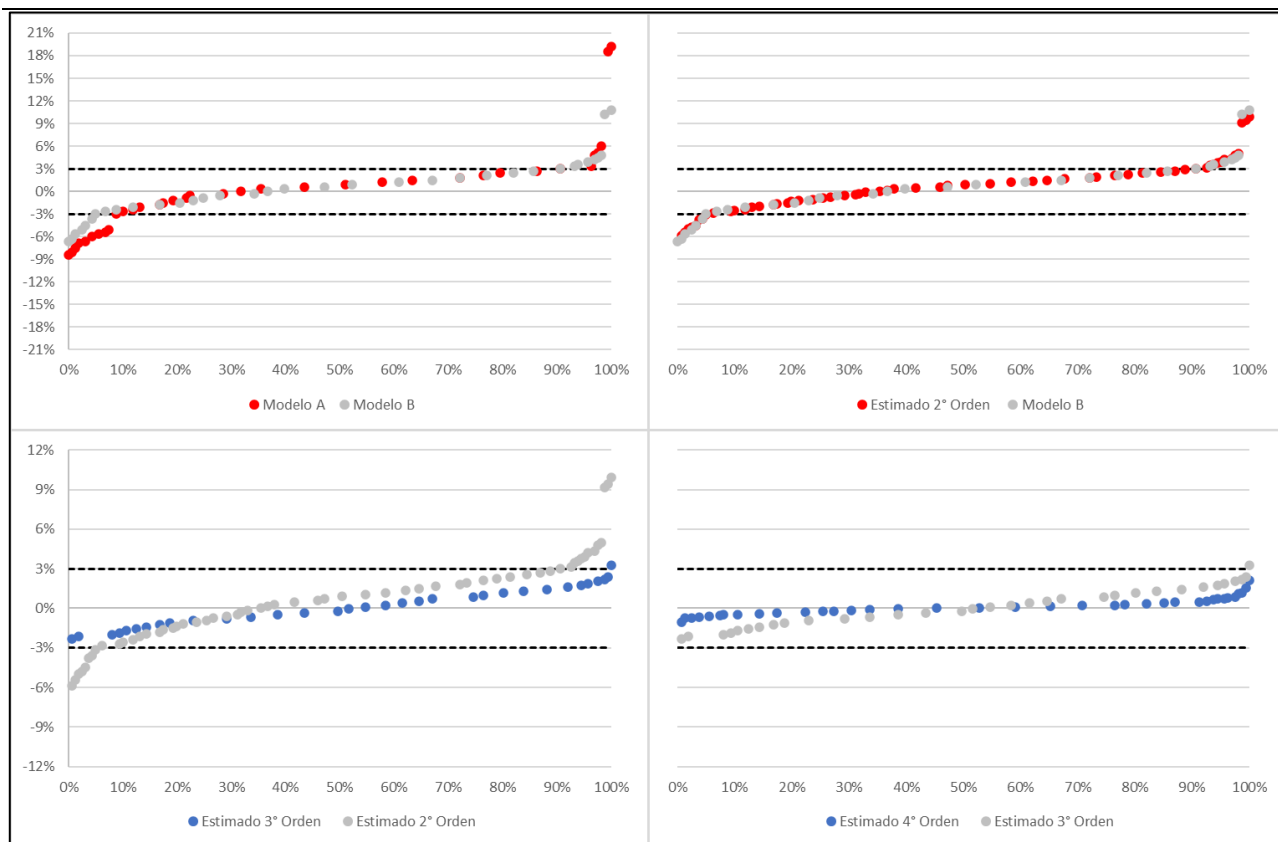


Figura 3: Error porcentual de los puntos calculados para todos los modelos propuestos

El modelo que en todos los casos se muestra como el mejor ajustado es el *Est4*; como se puede notar con mayor claridad en la Figura 4; **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, este modelo tiene todos sus puntos calculados dentro de la franja de error de 3%. Incluso, la gran mayoría de sus puntos están dentro de una franja de error del 1%, mientras que los demás puntos con mayores errores corresponden a fajas operativas desde donde se obtuvieron pocos puntos documentados en papel, lo que sugiere la obtención de más puntos en dichas fajas.

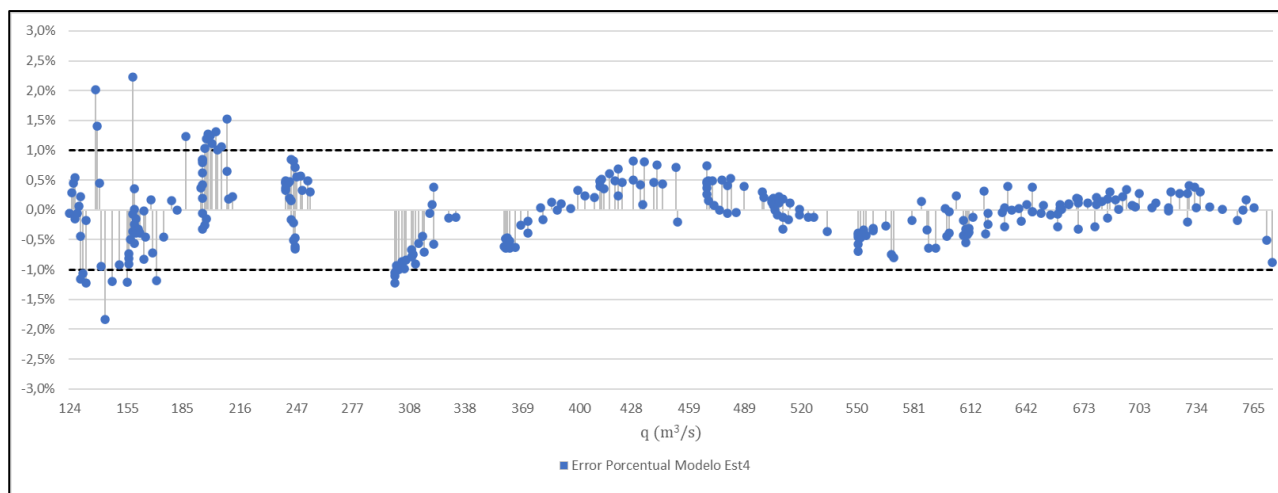


Figura 4: Error porcentual de todos los puntos visto desde el caudal turbinado q

XIV SEMINARIO DEL SECTOR ELECTRICO PARAGUAYO - CIGRE
 23 y 24 de Junio 2022

En la Tabla V se muestran los resultados del proceso de cálculo del caudal turbinado, para algunos valores de potencia considerados como datos de entrada al modelo con mejor ajuste.

Tabla V: Resultados arrojados en el cálculo del caudal turbinado para el modelo Est4

<i>Salto líquido (m)</i>	<i>Rendimiento de la turbina (%)</i>	<i>Potencia Calculada (MW)</i>	<i>Caudal (m³/s)</i>
82,59	89,73	399	560
84,73	90,81	404	546
86,76	91,63	409	535
88,79	92,30	414	526
90,81	92,87	424	523
92,84	93,33	429	515
94,85	93,90	459	536
96,87	94,32	474	540
98,89	94,67	499	554
100,91	94,97	514	558
102,93	95,19	534	567
104,95	95,38	549	571
106,98	95,45	574	585
109,00	95,53	591	590
111,03	95,49	616	604
113,06	95,46	636	613
115,09	95,47	651	616
117,12	95,48	666	620
119,15	95,54	676	618
121,18	95,61	686	616
123,21	95,74	686	605
125,24	95,85	701	607
126,58	95,96	701	600

5. CONCLUSION

Este trabajo presentó dos modelos matemáticos básicos para representar la curva de eficiencia de una turbina hidráulica; los parámetros de los modelos básicos fueron calculados mediante regresión lineal utilizando puntos obtenidos de la curva colina. Además, fueron construidos otros polinomios para estimar los puntos de rendimiento, de forma a determinar cuál metodología se ajusta mejor a los puntos de rendimientos extraídos de la curva colina documentada en papel.

El modelo que mostró un mejor ajuste fue el modelo de estimación *Est4*, con el cual no sólo se obtienen buenos valores para las fajas de rendimiento en donde típicamente suele operar una unidad generadora, sino que muestra que para todos los puntos levantados de la curva colina real, la diferencia entre el rendimiento real y el calculado fue menor al 3%.

Por último, se muestra que este modelo puede constituirse como una herramienta adicional en estudios de simulaciones de despacho de generación de unidades generadoras.

XIV SEMINARIO DEL SECTOR ELECTRICO PARAGUAYO - CIGRE
23 y 24 de Junio 2022

BIBLIOGRAFIA

- [1] Un modelo de Otimização do Despacho de Máquinas em Usinas Hidrelétricas. Universidad Estadual de Campinas, Brasil, 1999, páginas 11 y 12.
- [2] E. C. Finardi and E. L. Da Silva, "Solving the Unit Commitment Problem of Hydropower Plants via Lagrangian Relaxation and Sequential Quadratic Programming", Computational & Applied Mathematics Vol. 24, 2005, páginas 320-321.
- [3] A. L. Diniz, P. I. Esteves and C. A. Sagastizábal, "A Mathematical Model for Efficiency Curves of Hydroelectric Units", IEEE Power Engineering Society General Meeting, Tampa, Junio 2007.
- [4] F. Maldonado, Diseño de una turbina de río para la generación de electricidad. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú, 2005, página 13.
- [5] I. Hidalgo, D. Fontane, M. Arabi, J. Lopes, J. Andrade and L. Ribeiro, "Evaluation of Optimization Algorithms to Adjust Efficiency Curves for Hydroelectric Generating Units", Journal Energy Engineering Vol. 138 Issue 4, Diciembre 2012, páginas 172-178.
- [6] Curva Colina das unidades geradoras do Sistema Elétrico Brasileiro: Procedimento adotado para estimativa e modelagem. Facultad de Ingeniería Eléctrica y de Computación, Universidad Estadual de Campinas, Brasil, páginas 2-3.