



Comité Nacional Paraguayo



Unión de Ingenieros de ANDE

VIII SEMINARIO DEL SECTOR ELECTRICO PARAGUAYO - CIGRÉ
29, 30 y 31 de Octubre de 2008

TRANSITORIO TÉRMICO EN CIRCUITOS ELECTRÓNICOS: SIMULACIÓN Y CONTROL

Carlos A. Galeano, Mauricio J. Poletti, Horacio Feliciangeli

FIUNA-UNA, Campus Universitario, San Lorenzo, Paraguay.

Christian E. Schaerer

Politécnica, UNA, Campus Universitario, San Lorenzo

P.O.Box: 2111 SL, Paraguay. Email: cschaer@pol.una.py

RESUMEN

Este trabajo presenta la simulación y el control óptimo de la temperatura en un circuito electrónico sometido a fuentes internas de calor que modelan los componentes electrónicos en la placa. Las ecuaciones constitutivas son obtenidas modelando el circuito como una ecuación diferencial parabólica tridimensional donde los parámetros del circuito (calor específico, densidad y conductividad térmica) son considerados constantes por partes en el espacio. El controlador es diseñado definiendo un problema de control óptimo con restricciones. Los resultados numéricos se corresponden con los resultados de laboratorio obtenidos en la literatura.

PALABRAS CLAVES

Transitorio térmico, ecuación diferencial parabólica, elementos finitos, control óptimo

1. INTRODUCCION

La compactación en la construcción de equipos electrónicos modernos hace que la disipación de potencia afecte el correcto desempeño de los circuitos, degrade el semiconductor y en la mayoría de los casos produzca fallas por motivos térmicos [3], es decir, *el equipo se quema*. Por ello, el estudio del comportamiento térmico en circuitos electrónicos ha adquirido sustancial importancia, y en especial, en los que necesitan gran disipación de energía como los de electrónica de potencia [3,4,5,6]. Esto ocasiona un grave perjuicio especialmente a las economías menores que se ven obligadas a desechar equipos por fallas térmicas previsibles. En el caso del Paraguay, el problema se agrava cuando se considera su meteorología y posición geográfica.

Carlos Antonio Galeano Ríos

gcarlosa@gmail.com



Para simular el transitorio térmico (malla abierta), en la Sección 3, el dominio espacio-temporal es discretizado. Una formulación de elementos finitos *standard* es utilizada sobre la formulación variacional débil de forma a discretizar la ecuación en el dominio espacial. Para el dominio temporal es usada una formulación de Euler implícita. Condiciones de frontera de Robin son usadas para modelar el intercambio de calor por convección del aire con el medio, mientras que condiciones de Neumann modelan el sistema de enfriamiento de la placa. Los resultados de la simulación (Sección 5) están en concordancia con mediciones de laboratorio encontradas en la literatura.

En la Sección 4, para diseñar el controlador, se define un problema de minimización con restricciones donde el funcional de desempeño es una función cuadrática lineal asociada al estado del sistema (temperatura) y la variable de control (condiciones de frontera de Neumann). Las condiciones de optimalidad conllevan a un sistema de ecuaciones lineales indefinido de gran porte. Los resultados muestran que el sistema puede ser adecuadamente controlado y a priori permiten la elaboración de teoría sobre la controlabilidad térmica de circuitos (Sección 4). El software desarrollado permite la simulación de diferentes configuraciones de los circuitos.

2. PROBLEMA MODELO

Sea (t_0, t_f) un intervalo de tiempo; $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio poligonal; y $z(t, x)$ la temperatura en cada punto $(t, x) \in (t_0, t_f) \times \Omega$. El modelo de intercambio de calor en sólidos basado en la ley de conducción de Fourier y en el balance de energía para un elemento de volumen unitario es [4]:

$$\rho c_p \frac{\partial z}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla z) + f \quad \text{en } (t_0, t_f) \times \Omega, \quad (1)$$

donde la función $f(t, x)$ representa la fuente de calor del circuito, c_p es el calor específico, ρ es la densidad y λ es la conductividad térmica. De forma a simplificar el modelo, consideramos el circuito como un cuerpo poliédrico, despreciaremos los efectos de la radiación y consideramos el circuito constituido sólo por dos materiales isótropos.

En el presente trabajo tomaremos dos posibles condiciones de frontera dependiendo de si el sistema se encuentra en malla abierta o cerrada. Para el análisis del transitorio térmico en malla abierta, la condición de frontera de la ecuación (1) es dada por la siguiente condición de Robin:



$$-\lambda \partial_n z(t, x) = h [z(t, x) - z_\infty] \quad \text{en } (t_0, t_f) \times \partial\Omega. \quad (2)$$

Para el sistema en malla cerrada, consideramos que la variable de control es el flujo de calor en la superficie de la placa. De esta forma, la condición de frontera para la ecuación (1) en malla cerrada es dada por la siguiente condición de Neumann:

$$\partial_n z(t, x) = u(t, x) \quad \text{sobre } (t_0, t_f) \times \partial\Omega \quad (3)$$

Las condiciones iniciales al tiempo $t = t_0$ es $z(t_0, x) = z_0(x)$ para todo $x \in \Omega$.

3. DISCRETIZACIÓN ESPACIO-TEMPORAL Y FORMULACIÓN VARIACIONAL

Sea el espacio de las funciones $Z = H^1(\Omega)$, sea $z(t, x) \in L^2(t_0, t_f, Z)$ y $\frac{\partial z}{\partial t} \in L^2(t_0, t_f, Z')$ tal que Z' representa el dual de Z [7]. Para discretizar la ecuación (1), escogemos una partición cuasi-uniforme $\sigma_h(\Omega)$ del dominio Ω y escogemos un espacio $Z_h \subset Z$ de elementos finitos P_1 conforme para aproximar $z(t, x)$. Además, empleamos un espacio $U_h \subset U$ de elementos finitos P_0 para aproximar $u(t, x)$. Note que las propiedades físicas pueden ser discontinuas en cada elemento Ω_i , de esta forma como el dominio $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, entonces la formulación débil de la ecuación (1) cuando son considerados dos materiales ($k = 2$) toma la forma:

$$\sum_{k=1:2} \rho_k c_{pk} \sum_{j=1:n} \left(\frac{dz_j}{dt} \int_{\Omega_k} \eta_j \omega dx \right) = - \sum_{k=1:2} \left(\lambda_k \sum_{j=1:n} \left(z_j \int_{\Omega_k} \nabla \eta_j \cdot \nabla \omega dx \right) \right) \dots \quad (4)$$

$$+ \sum_{k=1:2} \left(\int_{\Gamma_k \in \Gamma_\Omega} \lambda_k \partial_n \left(\sum_{j=1:n} z_j \eta_j \right) \omega dx \right) + \sum_{k=1:2} \left(\int_{\Omega_k} \omega f dx \right)$$

donde Γ_k es la frontera de una región (conjunto de Ω_i) con propiedades físicas constantes. Utilizando el método de Galerkin, la ecuación (4) con las condiciones de contorno para malla abierta, conlleva a un sistema de ecuaciones lineales que puede ser representado matricialmente de la forma siguiente:

$$\begin{cases} M \frac{dz}{dt} = (A + D)z + T_{\infty} B \underline{h} + \underline{b} \\ z(t) = z_o, \end{cases} \quad (5)$$

donde $D_{ij} := \int_{\Gamma_{\Omega}} h \eta_i \eta_j dx$ y $B_{ij} := \int_{\Gamma_j} \eta_i dx$. En este trabajo consideramos $\underline{h} \in \mathfrak{R}^m$ como un vector constante. En la ecuación (5), $z \in \mathfrak{R}^n$ y $\underline{b} \in \mathfrak{R}^n$ son vectores que representan las variables de estado y las fuentes de calor en el interior del circuito, respectivamente. Las matrices son obtenidas usando el método de Galerkin. Es importante notar que las matrices M y A son simétricas positivas definidas (matriz de masa y rigidez) [1]. La matriz B es la matriz de entrada y no es de puesto completo.

En el caso de malla cerrada (control por flujo en la frontera), tomamos las condiciones de Neumann como las variables de control, así la ecuación (4) toma la siguiente forma:

$$\begin{cases} M \frac{dz}{dt} = Az + B\underline{v} + \underline{b} \\ z(t) = z_o. \end{cases} \quad (6)$$

donde $\underline{v} \in \mathfrak{R}^m$ es la variable de control (condición de frontera de Neumann).

Para la discretización temporal usamos una malla de $(l-1)$ puntos internos. Así el paso de tiempo queda $\tau = (t_f - t_o)/l$ y asumimos que el controlador discreto \underline{v} es constante en cada intervalo de tiempo. Usando un esquema de Euler implícito retroactivo, la representación matricial de la ecuación (5) es escrita como:

$$(M - \tau A)z_{i+1} = M z_i + \tau \underline{b}_{i+1} + \tau T_{\infty} B \underline{h}_{i+1}, \quad (7)$$

y equivalentemente la ecuación (6):

$$(M - \tau A)z_{i+1} = M z_i + \tau \underline{b}_{i+1} + \tau B \underline{v}_{i+1}. \quad (8)$$

En este caso los vectores z_i , \underline{u}_i y \underline{b}_i representan las variables de estado, control y el termino fuente, respectivamente, en el i -ésimo intervalo de tiempo. Considerando un ordenamiento léxico-gráfico la ecuación (10) tendrá la forma:

$$\mathbf{Ez} + \mathbf{Nv} = \mathbf{f}, \quad (9)$$



donde $z = \begin{pmatrix} z_1^T & \dots & z_l^T \end{pmatrix}^T$ y $v = \begin{pmatrix} v_1^T & \dots & v_l^T \end{pmatrix}^T$. Las matrices \mathbf{E} y \mathbf{N} , y el vector \mathbf{f} se definen en forma análoga.

4. CONTROL ÓPTIMO

Definimos una temperatura objetivo (función objetivo) para el circuito z^* y un funcional de desempeño como sigue [7]:

$$J(z(t), v(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \begin{pmatrix} z(t) - z^*(t) \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} z(t) - z^*(t) \end{pmatrix} dt + r \begin{pmatrix} v(t) \end{pmatrix}^T R \begin{pmatrix} v(t) \end{pmatrix} dt \quad (10)$$

donde $R \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ es simétrica positiva definida y $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es simétrica positiva semi-definida. El parámetro r permite ajustar la velocidad de respuesta de la solución. El controlador es escogido de forma a forzar la solución de la ecuación (6), de manera que minimice el funcional de desempeño (10) y se comporte de la forma especificada por la función objetivo z^* . Así, el problema de control óptimo para la ecuación (6) consiste en encontrar un controlador $\hat{v}(t)$ que minimice el funcional (10), es decir:

$$J(\hat{z}(t), \hat{v}(t)) = \min_{(z(t), v(t)) \in \mathfrak{N}} J(z(t), v(t)), \quad (11)$$

donde la restricción $(z(t), v(t)) \in \mathfrak{N}$ consiste en el conjunto de los $(z(t), v(t))$ que satisfacen la ecuación (6). En forma análoga a la discretización de la ecuación (6), que fue establecida en la sección anterior, discretizamos en el tiempo el funcional (10). Así, el problema de control (11) es transformado en un problema de minimización algebraico como sigue:

$$\begin{cases} \min \mathbf{J} \\ \text{sujeto a } \mathbf{Ez} + \mathbf{Nu} = \mathbf{f} \end{cases} \quad (12)$$

donde es $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} z - z^* \end{pmatrix}^T \mathbf{M} \begin{pmatrix} z - z^* \end{pmatrix} + r \mathbf{u}^T \mathbf{Gu}$ (para mas detalles vea [7]). Para transformar el problema de minimización con restricciones (12) en un problema de minimización irrestricta, usamos multiplicadores de Lagrange y aplicamos las condiciones de optimalidad obteniendo el siguiente sistema lineal de gran porte:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & & \mathbf{E} \\ & \mathbf{G} & \mathbf{N} \\ \mathbf{E} & \mathbf{N}^T & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Mz}^* \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Para resolver el sistema (13) usamos un método directo. Otros métodos más eficientes pueden ser implementados, vea por ejemplo [7] y las referencias en él incluidas.

5. RESULTADOS NUMERICOS

Consideramos una placa circuital de $7.5 \times 5 \times 0.15 \text{ cm}$. La conductividad térmica del cuerpo generador de calor $\lambda_1 = 1,5 \text{ W/mK}$, conductividad térmica de la placa $\lambda_2 = 240 \text{ W/mK}$, el coeficiente de convección para las caras superior e inferior $h = 17,8 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, Producto de la densidad por el calor específico del cuerpo generador de calor $\rho_1 c_{p1} = 1,67 \times 10^7 \text{ J/m}^3 \text{ K}$ y producto de la densidad por el calor específico de la placa $\rho_2 c_{p2} = 240 \times 10^4 \text{ J/m}^3 \text{ K}$. El calor disipado del cuerpo generador es $9,4 \text{ W}$. La placa tiene en su centro una fuente generadora de calor rectangular de $2 \times 1 \times 0.075 \text{ cm}$. En [4], esta fuente fue simulada agregando a una zona de la frontera un flujo de calor por medio de condiciones de Neumann.

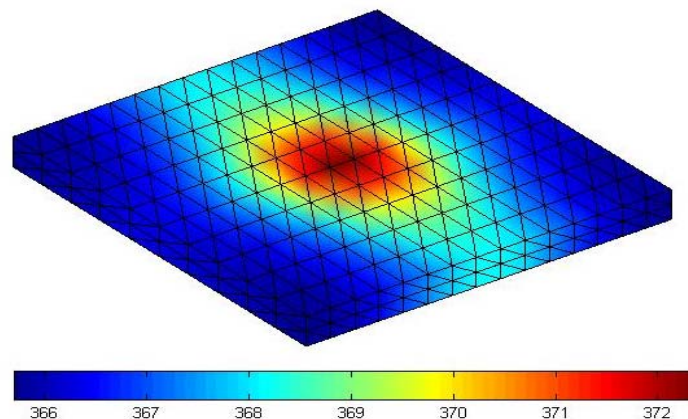


Figura 1: Malla abierta a los 400 segundos de simulación.

Caso 1. Para reproducir los resultados presentados en [4] consideramos en los bordes de la placa condiciones de frontera adiabáticas. La dirección con mayor gradiente es debido a la proximidad física de la frontera a la fuente (Figura 1). En la Figura 2, se presenta una comparación entre el resultado obtenido en laboratorio (extraído de [4]) y el resultado

obtenido con la simulación. Puede notarse que con las simplificaciones, los resultados numéricos obtenidos están en concordancia con los resultados obtenidos en laboratorio. De esta forma, se observa que el modelo captura eficientemente la física del problema.

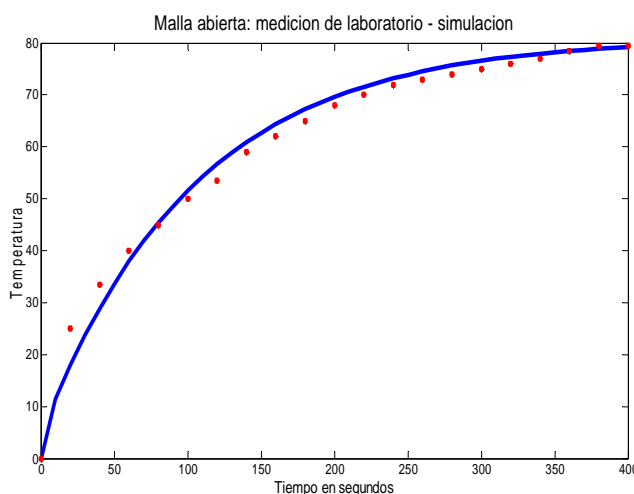


Figura 2: Malla abierta. Perfil de temperatura en el centro de la placa. Las marcas representan mediciones de laboratorio extraídas de [4]. La línea continua muestra el resultado de la simulación.

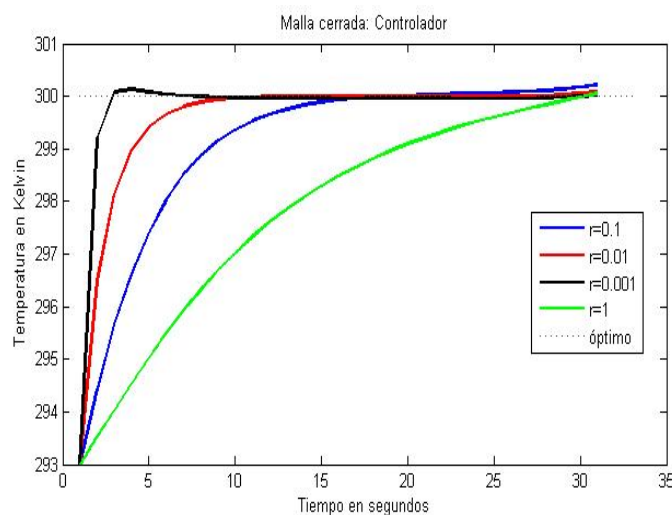


Figura 3: Malla cerrada. Temperatura en el centro de la placa para diferentes valores de r .



Caso 2. En la figura 3, se presenta el resultado obtenido aplicando el controlador para llegar a una temperatura prefijada de 300 K. Note que en la medida que los valores de r disminuyen desde 1 a 0.001, la velocidad de respuesta del controlador es mayor y su tiempo de establecimiento es menor.

6. OBSERVACIONES FINALES

Los resultados numéricos muestran que la formulación de elementos finitos y las simplificaciones realizadas permiten capturar el fenómeno de calentamiento y enfriamiento de la placa. El control óptimo de frontera permite controlar la temperatura en la placa cuando se considera un modelo tridimensional. La discretización *all at once* tiene la deficiencia de generar un sistema de ecuaciones de gran porte. Este problema es relevante en tres dimensiones, especialmente si se desea alta precisión en los resultados, otras técnicas menos costosas están en estudio.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Albery J.; Carstensen C.; Funken S.; “Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation”. (Numerical Algorithms, 20: 117-137, 1999).
- [2] Bock H.G.; Diehl M.; Kostina E.; Schölder J. P.; “Constrained Optimal Feedback Control of System Governed by Large Differential Algebraic Equations” (Real-Time PDE-Constrained Optimization, Editores: Biegler L.T.; Keyes D.; Gattas O.; Waanders B.v.B.; Heinkenschloss M.; Serie: Computational Science & Engineering, SIAM, Philadelphia, 2007).
- [3] Janicki M.; Napieralski A.; “Modeling electronic circuit radiation cooling using analytical thermal model”. (Microelectronics Journal, 31: 781-785, 2000).
- [4] Janicki M.; De Mey G.; Napieralski A.; “Application of Green’s function for analysis of transient thermal states in electronic circuits”. (Microelectronics Journal, 33: 733-738, 2002).
- [5] Janicki M.; De Mey G.; Napieralski A.; “Transient thermal analysis of multilayered structures using Green’s function”. (Microelectronics Reliability, 42: 1059-1064, 2002).
- [6] Sauer C.E.; Feliciangeli H.; Schaerer C.E.; “Optimal boundary control for cooling electronic circuits”. (CNMAC, Florianopolis, Setiembre , Brasil, 2007).
- [7] Schaerer C.E.; Mathew T.; Sarkis M.; “Temporal domain decomposition for a linear quadratic optimal control problems” (High Performance Computing for Computational Sciences-VECPAR 2006, Lecture Notes in Computer Sciences, vol. 4395, 2007, pp. 452-465, 2007).